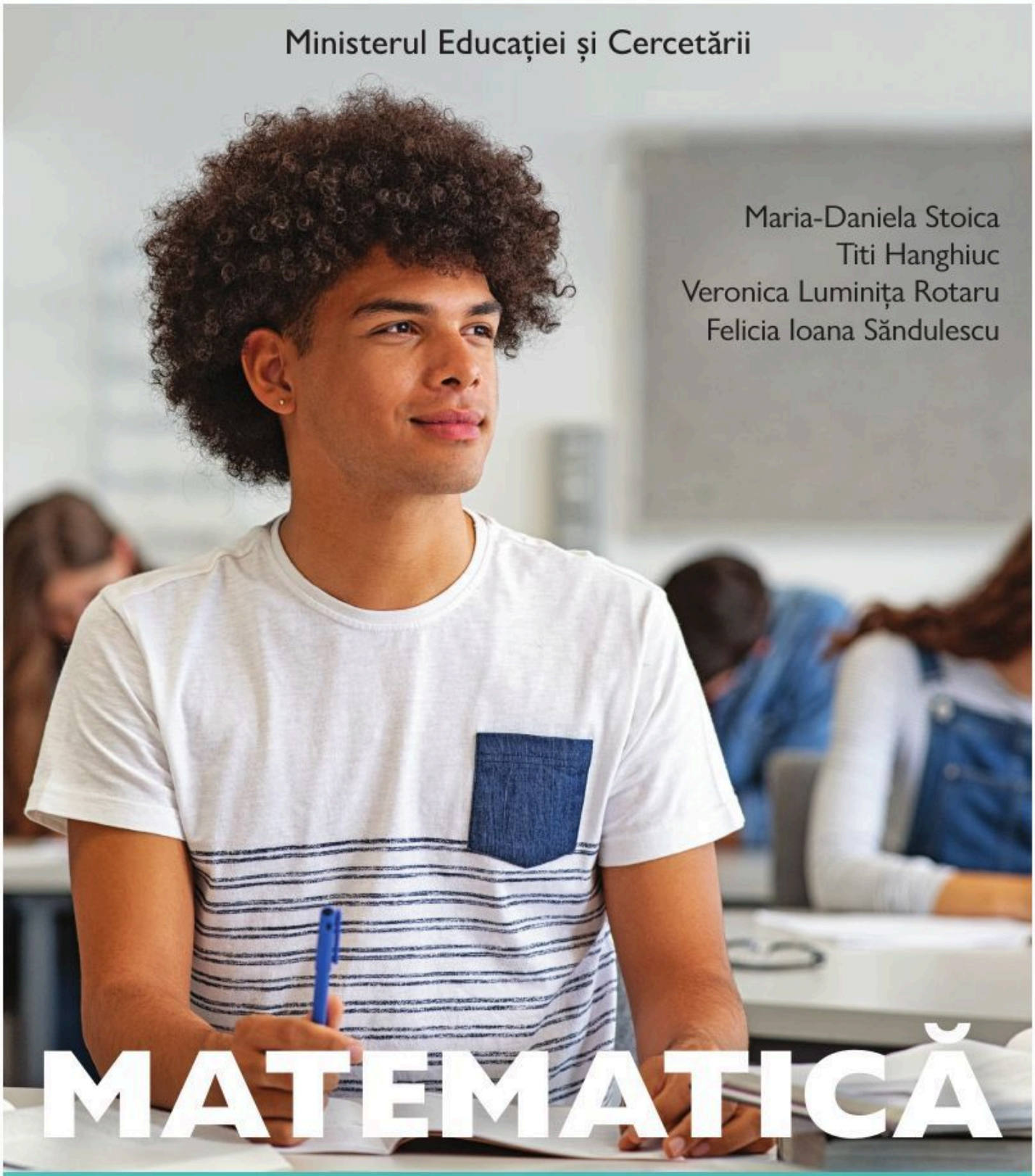
Ministerul Educației și Cercetării

Maria-Daniela Stoica
Titi Hanghiuc
Veronica Luminița Rotaru
Felicia Ioana Săndulescu



MATEMATICĂ

Trunchi comun și curriculum de specialitate (TC+CS), filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică – clasa a IX-a

Booklet

Manualul școlar a fost aprobat de Ministerul Educației și Cercetării prin Ordinul de ministru nr. 5779/09.10.2026.

Manualul este distribuit elevilor în mod gratuit, atât în format tipărit, cât și în format digital, și este transmisibil timp de opt ani școlari, începând din anul școlar 2026 – 2027.

Inspectoratul Școlar _____

Școala/Colegiul/Liceul _____

ACEST MANUAL A FOST FOLOSIT DE:

Anul	Numele elevului	Clasa	Anul școlar	Aspectul manualului*	
				la primire	la predare
1.					
2.					
3.					
4.					
5.					
6.					
7.					
8.					

* Pentru precizarea aspectului manualului se va folosi unul dintre următorii termeni: *nou, bun, îngrijit, neîngrijit, deteriorat.*

- Cadrele didactice vor verifica dacă informațiile înscrise în tabelul de mai sus sunt corecte.
- Elevii nu vor face niciun fel de însemnări pe manual.

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
Matematică : trunchi comun și curriculum de specialitate (TC+CS), filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică: clasa a IX-a / Maria-Daniela Stoica, Titi Hanghiuc, Veronica Luminița Rotaru, Felicia Ioana Săndulescu. – București : Booklet, 2026
ISBN 978-630-347-339-0

I. Stoica, Maria-Daniela
II. Hanghiuc, Titi
III. Rotaru, Veronica
IV. Săndulescu, Felicia

51

Referenți științifici: conf. univ. dr. habil. Georgia Irina Oros, Universitatea din Oradea
prof. gr. I Valerian Vlăduț, Liceul Teoretic „Dimitrie Bolintineanu", București
Redactor-șef: Bogdan Nicolai
Redactor: Ana Bratu
Corector rezolvator: Daniela Ciofu
Design copertă: Silvia Olteanu
Tehnoredactare: Carmen Dumitrescu
Grafică și DTP: Mihaela Cojoc
Video: Quartz Film Studio
Voce: Ramona Mihai
Digital: MyKoolio
Credite foto: Adobe Stock

Booklet

Pentru comenzi:
tel.: 021.430.30.95/021.440.10.02
e-mail: comenzi@booklet.ro
site: www.booklet.ro

© Editura Booklet
Toate drepturile asupra lucrării aparțin editurii.

CUPRINS

Competențe generale și specifice 5
Ghid de utilizare a manualului digital 6
Recapitulare inițială 7
Evaluare inițială 8

UNITATEA 1
Elemente de logică matematică 9

1. Propoziții, predicate; operații cu propoziții și predicate: negația, conjuncția, disjuncția, implicația, echivalența; cuantificatorul existențial și cuantificatorul universal; reguli de negare, reducere la absurd
1.1. Propoziții, predicate 10
1.2. Operații cu propoziții și predicate: negația, conjuncția, disjuncția, implicația, echivalența 14
1.3. Cuantificatorul existențial și cuantificatorul universal 21
1.4. Reguli de negare 24
1.5. Reducere la absurd 26
2. Metoda inducției matematice 28
Recapitulare 32
Portofoliu 33
Evaluare 34

UNITATEA 2
Șiruri și progresii 35

1. Șiruri; moduri de definire a unui șir. Progresii aritmetice și progresii geometrice: determinarea termenului general al unei progresii; suma primilor n termeni ai unei progresii, caracterizarea unei progresii prin relația dintre orice trei termeni consecutivi, condiția ca n numere reale să fie în progresie aritmetică sau geometrică, pentru $n \geq 3$
1.1. Șiruri; moduri de definire a unui șir 36
1.2. Progresii aritmetice: determinarea termenului general al unei progresii; suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice, caracterizarea unei progresii aritmetice prin relația dintre orice trei termeni consecutivi, condiția ca n numere reale să fie în progresie aritmetică, pentru $n \geq 3$ 41
1.3. Progresii geometrice: determinarea termenului general al unei progresii; suma primilor n termeni ai unei progresii geometrice, caracterizarea unei progresii geometrice prin relația dintre orice trei termeni consecutivi, condiția ca n numere reale să fie în progresie geometrică, pentru $n \geq 3$ 51
Portofoliu 60
Studiu de caz 61
Recapitulare 62
Evaluare 64

UNITATEA 3
Funcții 65

1. Proprietăți generale ale funcțiilor
1.1. Funcții: definiție, exemple, modalități de a descrie o funcție, funcții egale, restricții ale unei funcții, imaginea unei funcții 66
1.2. Reprezentarea grafică a unei funcții definite pe submulțimi ale lui $\mathbb{R}$, intersecția graficului cu axele de coordonate, drepte în plan de forma $x = m$ sau de forma $y = m$, $m \in \mathbb{R}$; semnul unei funcții numerice, interpretarea geometrică a soluțiilor ecuațiilor de forma $f(x) = m$ și $f(x) = g(x)$ 76
1.3. Proprietăți ale funcțiilor numerice: monotonie, mărginire, paritate/imparitate, convexitate/concavitate; lecturi grafice 89
1.4. Funcții obținute prin operații algebrice elementare (sumă, diferență, produs, raport); compunerea funcțiilor 103
1.5. Funcții injective, surjective, bijective, inversabile: definiție, interpretare geometrică pentru funcții numerice, condiția necesară și suficientă ca o funcție să fie inversabilă; lecturi grafice 113
Recapitulare intermediară 124
Îmi încerc puterile 127
2. Funcția de gradul al doilea
2.1. Definiție, reprezentare grafică, intersecțiile reprezentării grafice cu axele de coordonate, axa de simetrie 128
2.2. Monotonia funcției de gradul al doilea; punctul de extrem 139

CUPRINS

2.3. Semnul funcției de gradul al doilea; interpretare geometrică (poziția unei parabole în raport cu axa Ox), inecuații de gradul al doilea studiate pe mulțimea $\mathbb{R}$ sau pe intervale de numere reale; interpretare geometrică (proiecții ale unor porțiuni de parabolă pe axe) 145

2.4. Relațiile lui Viète 153

2.5. Sisteme care conțin ecuații de gradul al doilea; interpretare geometrică 157

Investigație 163

Recapitulare intermediară 164

Îmi încerc puterile 166

3. Funcția putere cu exponent întreg. Funcția radical

3.1. Funcția putere cu exponent întreg 167

3.2. Radicali, operații cu radicali, proprietățile radicalilor; expresii conjugate 178

3.3. Funcția radical 186

3.4. Ecuații și inecuații cu radical 193

Recapitulare 197

Evaluare 198

UNITATEA 4

Funcții trigonometrice. Ecuații trigonometrice 199

1. Cercul trigonometric; funcțiile sinus și cosinus definite pe intervalul $[0, 2\pi]$; reducerea la primul cadran

1.1. Cercul trigonometric; funcțiile sinus și cosinus definite pe intervalul $[0, 2\pi]$ 200

1.2. Reducerea la primul cadran 208

2. Funcțiile sinus, cosinus, tangentă și cotangentă; relații între funcțiile trigonometrice sinus, cosinus, tangentă, cotangentă

2.1. Funcțiile sinus și cosinus 213

2.2. Funcțiile tangentă și cotangentă 219

2.3. Relații între funcțiile trigonometrice sinus, cosinus, tangentă, cotangentă 223

3. Formule trigonometrice pentru suma/diferența a două numere reale 227

4. Transformarea sumelor în produse și a produselor în sume 233

5. Funcții trigonometrice inverse 237

6. Ecuații trigonometrice 245

Investigație 255

Recapitulare 256

Evaluare 258

UNITATEA 5

Aplicații ale trigonometriei în geometrie. Relații metrice 259

1. Teorema cosinusului, teorema sinusurilor, rezolvarea triunghiurilor 260

Proiect 269

2. Raza cercului înscris și raza cercului circumscris unui triunghi. Aria unui triunghi 270

3. Teorema bisectoarei; relația lui Stewart; lungimile unor segmente importante din triunghi 275

Portofoliu 279

4. Concurență și coliniaritate în geometria plană: teorema lui Menelaus, teorema lui Ceva 280

Recapitulare 286

Evaluare 288

Recapitulare finală 289

Evaluare finală 292

Indicații și răspunsuri 293

Anexă 296

Ce vei învăța anul acesta la matematică?

CG.1 - Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar

IX.CS.1.1. Identificarea propozițiilor elementare din care este alcătuit un enunț matematic

IX.CS.1.2. Identificarea elementelor specifice șirurilor/ progresiilor în contexte variate

IX.CS.1.3. Identificarea unor relații de tip dependență funcțională între variabile sau entități, pentru a evidenția elemente ale funcțiilor

IX.CS.1.4. Identificarea pe cercul trigonometric a punctelor asociate unor numere reale

IX.CS.1.5. Identificarea elementelor necesare pentru calcularea unor măsuri (lungimi de segmente, unghiuri, arii)

CG.2 - Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale

IX.CS.2.1. Identificarea operațiilor cu propoziții elementare din cadrul unui enunț matematic

IX.CS.2.2. Efectuarea de calcule pentru determinarea elementelor șirurilor, progresiilor aritmetice și geometrice, utilizând formule specifice

IX.CS.2.3. Extragerea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ și structural, din reprezentări grafice pentru a descrie proprietățile unei funcții (monotonie, convexitate, puncte de extrem etc.) într-o situație practică dată

IX.CS.2.4. Stabilirea unor caracteristici calitative/cantitative folosind funcții trigonometrice, inclusiv folosind instrumente digitale

IX.CS.2.5. Aplicarea unor metode adecvate pentru determinarea unor distanțe, a unor măsuri de unghiuri și a unor arii

CG.3 - Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice

IX.CS.3.1. Determinarea valorii de adevăr a unui enunț matematic format din propoziții legate prin operatori logici

IX.CS.3.2. Aplicarea algoritmilor de calcul pentru determinarea unor termeni și a sumelor unor termeni consecutivi ai progresiilor aritmetice și geometrice, în diferite contexte

IX.CS.3.3. Aplicarea unor concepte și algoritmi matematici (funcții, rate de variație etc.), pentru a interpreta reprezentări grafice în scopul extragerii de informații relevante pentru rezolvarea, în contexte matematice, a unor probleme practice

IX.CS.3.4. Calcularea valorii unei funcții trigonometrice când se cunosc informații despre valorile unei alte funcții trigonometrice

IX.CS.3.5. Determinarea măsurilor unor unghiuri și a lungimilor unor segmente utilizând relații metrice

CG.4 - Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată

IX.CS.4.1. Precizarea structurii logice a unui enunț

IX.CS.4.2. Transpunerea în limbaj specific matematic a unor situații din viața cotidiană referitoare la șiruri sau progresii în scopul analizării comportamentului acestora

IX.CS.4.3. Exprimarea unor concluzii și justificări matematice, utilizând limbajul specific funcțiilor (simboluri, formule, expresii, reprezentări), pentru a comunica informații extrase din reprezentări grafice, în contexte matematice practice

IX.CS.4.4. Stabilirea unor relații matematice utilizând calculul trigonometric

IX.CS.4.5. Caracterizarea în limbaj matematic a unei configurații geometrice folosind elemente de trigonometrie sau relații metrice

CG.5 - Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date

IX.CS.5.1. Formularea unui enunț matematic (axiomă, definiție, relație/proprietate/teoremă) asociat unei situații date

IX.CS.5.2. Analizarea unor situații date în contexte intra și interdisciplinare, selectând modelul de progresie adecvat și metoda de rezolvare eficientă în funcție de datele disponibile

IX.CS.5.3. Analizarea unor situații date prin interpretarea reprezentărilor grafice și evidențierea soluțiilor posibile pentru a interpreta situații reale și a formula concluzii argumentate în contexte intra și interdisciplinare

IX.CS.5.4. Analizarea proprietăților funcțiilor trigonometrice folosind reprezentarea grafică sau cercul trigonometric

IX.CS.5.5. Aplicarea unor metode variate pentru optimizarea calculelor de distanțe, de măsuri de unghiuri și de arii

CG.6 - Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii

IX.CS.6.1. Validarea unui enunț matematic asociat unei situații date

IX.CS.6.2. Modelarea matematică, folosind șirurile sau progresiile, a unor situații reale pentru interpretarea implicațiilor în contexte interdisciplinare și pentru luarea unor decizii fundamentate pe datele obținute

IX.CS.6.3. Modelarea unei situații reale, utilizând un model matematic (funcții, relații) construit pe baza datelor extrase din reprezentări grafice, pentru a explica, a anticipa sau a optimiza rezultate în contexte precum economie, biologie sau fizică

IX.CS.6.4. Descrierea unor relații între mărimi din diferite domenii, cu ajutorul funcțiilor trigonometrice

IX.CS.6.5. Modelarea unor configurații geometrice utilizând metode metrice, trigonometrice, sintetice

GHID DE UTILIZARE A MANUALULUI DIGITAL

Manualul digital reproduce integral versiunea tipărită, oferindu-le elevilor posibilitatea de a interacționa cu diverse elemente de conținut. Astfel, aceștia vor putea să vizioneze animații sau filme, să rezolve exerciții interactive și să navigheze prin manual.

Simboluri:



1. Elemente grafice (AMII statice):
imagini, informații și activități suplimentare.



2. Elemente video (AMII animate):
videoclipuri cu informații și activități suplimentare, curiozități.



3. Exerciții interactive (AMII interactive):
exerciții de alegere multiplă, de tip adevărat sau fals, de asociere, de completare etc.

Cum se folosește manualul digital?

1. Meniul superior



Mărire/micșorare – se mărește sau se micșorează fereastra.



Căutare – pot fi efectuate căutări în manualul digital după cuvinte-cheie.



Cuprins – deschide cuprinsul manualului digital.



Înapoi la prima pagină – se revine la prima pagină a manualului digital.



Pagina anterioară – se accesează pagina anterioară paginii curente.



Pagina următoare – se accesează pagina următoare paginii curente.



Salt la ultima pagină – se accesează ultima pagină a manualului digital.



Adnotări – deschide o galerie de instrumente, cu funcții diferite, ce permit operații în timp real: sublinieri, adnotări, încercuiri, demarcări, mascări, evidențieri etc.



Tipărește pagini din manualul digital.



Indicații – se accesează ecranul cu indicații.

2. Ajutor în utilizarea exercițiilor interactive (AMII interactive):

Deschide exercițiul interactiv dând click pe . Citește cerința, apoi utilizează mouse-ul și/sau tastatura pentru a rezolva exercițiile conform instrucțiunilor. Apasă butonul **Verifică** pentru a vedea dacă ai ales corect. Pentru toate tipurile de exerciții apare ✔ în cazul răspunsului corect și ✘ în cazul răspunsului greșit. Pentru a relua rezolvarea exercițiului, apasă butonul **Mai încearcă** sau reîncarcă pagina.

3. Ajutor în utilizarea elementelor video (AMII animate):

Apasă butonul pentru a deschide videoclipul. Butonul **Play (Vizualizare)** este localizat pe bara de jos a ferestrei, alături de **Volum** și de opțiunea **Afișare completă** pe ecran. Pentru a opri temporar videoclipul, apasă butonul **Pauză**, de pe bara de jos a ferestrei. Pentru a închide videoclipul, apasă butonul din colțul din dreapta sus al ferestrei.

4. Ajutor în utilizarea elementelor grafice (AMII statice):

Apasă butonul . Imaginea se va deschide într-o fereastră nouă. Apasă butonul din colțul din dreapta sus, pentru a închide imaginea.

1. Compară numerele reale a și b.

a) $a = 2\sqrt{50} - 3\sqrt{18} + \sqrt{98} - 3\sqrt{8}$, $b = \frac{11}{\sqrt{12}} - \frac{7}{5\sqrt{3}} + \frac{9}{\sqrt{300}}$;

b) $a = \left(\frac{15}{49} : \frac{10}{21} + \frac{5}{21}\right) \cdot \frac{18}{17} : \left(-\frac{2}{7}\right)$, $b = \left\{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{5} + \frac{7}{15}\right] : 3\right\}^{-1} \cdot \frac{1}{2}$;

c) $a = 2^{15} : 8^3 \cdot 16^2 \cdot 4^{-5}$, $b = 9^5 : 27^2$.

2. Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a) $-4 + 2x = 0$;

b) $1 - 4x = 6x - 7$;

c) $3 - 2(1 - 3x) = 3(1 + 2x) + 1$;

d) $\frac{3 + 4x}{2} - \frac{3x - 5}{12} = \frac{1 - 2x}{4} + 3$;

e) $x^2 = 36$;

f) $x^2 - x = 6$.

3. Se consideră mulțimile $A = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ și } |2x + 1| \leq 5\}$ și $B = \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ și } x - 2(x + 1) < -3\}$.

a) Scrie mulțimile A și B sub formă de interval.

b) Determină suma numerelor întregi din mulțimea A.

c) Determină $A \cup B$ și $A \cap B$.

4. Pentru 4 caiete tip dictando și 5 caiete cu foaie velină, Ana a plătit la casă 174 de lei, iar pentru 3 caiete tip dictando și 2 caiete cu foaie velină, de același tip cu cele cumpărate de Ana, Maria a plătit 99 de lei. Determină prețul unui caiet tip dictando și prețul unui caiet cu foaie velină.

5. Se consideră expresia $E(x) = (x + 1)^2 + 3(x - 2)(x + 2) - 4(x + 1)(x + 2)$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Arată că $E(1)$ este un număr întreg mai mic decât -20.

b) Determină mulțimea numerelor reale x pentru care $E(x) \geq 1$.

6. Se consideră expresia $E(x) = \left(\frac{3x - 6}{x^2 - 4x + 4} - \frac{2x - 1}{x^2 - 4} + \frac{x + 3}{x + 2}\right) : \frac{x + 1}{x - 2}$, unde x este număr real, $x \neq -2$, $x \neq -1$ și $x \neq 2$. Arată că $E(x) = 1 - \frac{1}{x + 2}$, pentru orice număr real x, unde $x \neq -2$, $x \neq -1$ și $x \neq 2$.

7. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 4$.

a) Arată că $f\left(\frac{2}{3}\right) - g\left(-\frac{1}{3}\right) = 3$.

b) Reprezintă grafic funcția f în sistemul de axe ortogonale xOy.

c) Verifică dacă punctul $A(-1, -7)$ aparține reprezentării geometrice a graficului funcției f în sistemul de axe ortogonale xOy.

d) Determină numărul real m pentru care punctul $M(m, -8)$ aparține reprezentării geometrice a graficului funcției f în sistemul de axe ortogonale xOy.

e) Determină coordonatele punctului N de pe reprezentarea geometrică a graficului funcției f în sistemul de axe ortogonale xOy, știind că acesta are coordonatele egale.

f) Determină distanța de la originea sistemului de axe ortogonale xOy la reprezentarea geometrică a graficului funcției f în sistemul de axe ortogonale xOy.

g) Determină coordonatele punctului de intersecție dintre reprezentările geometrice ale graficelor funcțiilor f și g, unde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -2x + 5$.

h) Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuația $f(x) \leq 9$.

8. Fie MNP un triunghi dreptunghic $\sphericalangle N = 90°$ cu $MN = 12$ cm și $NP = 9$ cm. Punctul Q este proiecția ortogonală a punctului N pe dreapta MP.

a) Calculează aria triunghiului MNP.

b) Calculează lungimea segmentului NQ.

c) Calculează $\sin(\sphericalangle PNQ)$.

9. Fie ABC un triunghi dreptunghic ABC ($\sphericalangle A = 90°$) cu $BC = 16$ cm și $\sphericalangle B = 30°$. Punctul M este mijlocul segmentului BC. Arată că perimetrul triunghiului AMB este mai mic decât 32 cm.

10. Se consideră piramida patrulateră regulată VABCD cu $AB = 6$ cm și $VA = 5$ cm. Punctul M este mijlocul segmentului VA și $AC \cap BD = \{O\}$.

a) Determină aria totală și volumul piramidei VABCD.

b) Demonstrează că dreapta OM este paralelă cu planul (VCD).

Evaluare inițială

Timp de lucru: 45 de minute **Se acordă 10 puncte din oficiu.**

Subiectul I **30 de puncte**

30 de puncte

1. *Scrie litera corespunzătoare răspunsului corect pentru fiecare dintre enunțurile de mai jos. Este corectă o singură variantă de răspuns.*

(10 p.) **A.** Se consideră intervalele de numere reale $I = (-\infty, 3)$ și $J = [-2, +\infty)$. Intersecția intervalelor I și J este intervalul:

a) $(-\infty, 3)$; b) $[-2, 3)$; c) $(-2, 3]$; d) $(3, +\infty)$.

(10 p.) **B.** Dacă $a = \sqrt{3} + 1$ și $b = \sqrt{12}$, atunci $a^2 - b$ este egal cu:

a) $\sqrt{12}$; b) $4 - \sqrt{12}$; c) 4; d) -1.

(10 p.) **C.** Dacă ABC este un triunghi cu AB = 4 cm, AC = 3 cm și BC = 5 cm, atunci aria triunghiului ABC este egală cu:

a) 6 cm²; b) 12 cm²; c) 15 cm²; d) 17 cm².

Subiectul al II-lea **60 de puncte**

Scrie rezolvările complete.

45 de puncte

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -4x + 8$.

(10 p.) **a)** Calculează $f\left(\frac{5}{2}\right) - 2f\left(-\frac{1}{4}\right)$.

(5 p.) **b)** Verifică dacă punctul A(−1, 4) aparține reprezentării geometrice a graficului funcției f în sistemul de axe ortogonale xOy.

(10 p.) **c)** Determină distanța de la originea sistemului de axe ortogonale xOy la reprezentarea geometrică a graficului funcției f în sistemul de axe ortogonale xOy.

(10 p.) **d)** Determină coordonatele punctului de intersecție dintre reprezentările geometrice ale graficelor funcțiilor f și g, unde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x + 10$.

(10 p.) **e)** Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuația $f(x) > 4$.

15 puncte

2. Se consideră tetraedrul regulat ABCD cu AB = 12 cm. Punctele M și N sunt mijloacele segmentelor CD, respectiv AD.

(5 p.) **a)** Determină volumul tetraedrului ABCD.

(10 p.) **b)** Determină lungimea segmentului MN.

Autoevaluare

Acordă pentru următoarele afirmații o notă de la 5 la 1, pentru a-ți evalua cunoștințele dobândite în anul școlar precedent.

LA SFÂRȘITUL ACESTEI UNITĂȚI:	**5** foarte bine	**4** bine	**3** mediu	**2** slab	**1** foarte slab
Mi-a fost ușor să rezolv exercițiile.					
Am înțeles criteriile de rezolvare.					
Mi-am amintit conținuturile învățate.					

Unitatea

1

Elemente de logică matematică

- 1. Propoziții, predicate; operații cu propoziții și predicate: negația, conjuncția, disjuncția, implicația, echivalența; cuantificatorul existențial și cuantificatorul universal; reguli de negare, reducere la absurd
- 1.1. Propoziții, predicate
- 1.2. Operații cu propoziții și predicate: negația, conjuncția, disjuncția, implicația, echivalența
- 1.3. Cuantificatorul existențial și cuantificatorul universal
- 1.4. Reguli de negare
- 1.5. Reducere la absurd
- 2. Metoda inducției matematice







1.1. Propoziții, predicate

Descopăr

Precizează dacă următoarele afirmații sunt adevărate sau false.

1. Balena este un pește.
2. O oră are 3 600 de secunde.
3. Soluția ecuației $x + 2 = 3, x \in \mathbb{R}$, este $x = 1$.
4. Hai acasă!
5. $x + y + z = 2, x, y, z \in \mathbb{R}$.
6. Unde mergem?
7. π este număr irațional.
8. $x = y, x, y \in \mathbb{R}$.

Învăț

Logica matematică studiază regulile de bază, după care se pot combina afirmațiile pentru a construi raționamente valabile. În matematică, enunțurile pot fi adevărate sau false. Putem spune că logica matematică este „gramatica gândirii corecte".

Definiția 1. **Un enunț este un ansamblu de simboluri cărora li s-a dat un anumit sens.**

EXEMPLE:

1. „Numărul 2 este impar."
2. „$3 \in \mathbb{Z}$"
3. „$x + 5 \leq 3, x \in \mathbb{R}$"
4. „Cât este ceasul?"

Rezolvând exercițiul propus la secțiunea **Descopăr**, observăm că:

– despre unele enunțuri putem spune cu certitudine că sunt adevărate sau false;

– unor enunțuri nu li se poate atribui una dintre valorile „adevărat" sau „fals";

– unele enunțuri devin adevărate sau false în funcție de valorile pe care le primesc necunoscutele de care depind.

Definiția 2. **Se numește propoziție, în sensul logicii matematice, un enunț care este adevărat sau fals (dar nu ambele simultan).**

Propozițiile se notează cu litere mici, de obicei p, q, r, s, sau cu litere mici cu indici, de exemplu p_1, q_2, r_3.

EXEMPLE:

1. p: „$5 - 2 = 2$"
2. q_2: „$9 \vdots 3$"
3. r_3: „$3 \leq 6$"
4. q: „Craiova este reședința județului Dolj."

Definiția 3. **Proprietatea unei propoziții p de a fi adevărată sau falsă se numește valoarea de adevăr a propoziției p.**

Valoarea de adevăr a unei propoziții este „adevărul" (notat A sau 1), dacă propoziția este adevărată, sau „falsul" (notat F sau 0), dacă propoziția este falsă.

OBSERVAȚIE.

Logica matematică se mai numește și **logică bivalentă**, deoarece singurele valori de adevăr care pot fi atribuite unei propoziții sunt „adevărul" și „falsul".

EXEMPLE:

1. Propoziția p: „$7 + 3 = 21$" este falsă, deci valoarea sa de adevăr este F (sau 0).

2. Propoziția q: „Laturile pătratului sunt congruente." este adevărată, deci valoarea sa de adevăr este A (sau 1).

OBSERVAȚII.

1. O teoremă din matematică este o propoziție adevărată.

2. Enunțurilor de tipul „Hai acasă!" sau „Unde ai fost?" nu li se poate atribui o valoare de adevăr. Acestea nu sunt propoziții în sensul logicii matematice.

Definiția 4. **Se numește predicat un enunț care depinde de una sau mai multe variabile și care devine propoziție adevărată sau propoziție falsă în funcție de valorile pe care le atribuim variabilei/variabilelor.**

OBSERVAȚIE.

La definirea unui predicat se indică mulțimea/mulțimile în care variabila/variabilele ia/iau valori.

Definiția 5. **Mulțimea de adevăr a unui predicat este mulțimea tuturor valorilor variabilei/variabilelor pentru care predicatul devine o propoziție adevărată.**

OBSERVAȚII.

1. Predicatele se notează tot cu litere mici, urmate de paranteze rotunde între care se pun variabilele, de exemplu, $p(x)$, $q(x, y)$, $p_1(x, y, z)$, $q_2(x_1, x_2, x_3)$.

2. În funcție de numărul de variabile de care depinde, un predicat poate fi: **unar** – notat, de exemplu, $p(x)$; **binar** – notat, de exemplu, $p(x, y)$; **ternar** – notat, de exemplu, $p(x, y, z)$ etc.

EXEMPLE:

1. Enunțul $p(x)$: „$x^2 - 2x - 3 = 0$", unde $x \in \mathbb{R}$, este un predicat unar.

Pentru $x = 1$, obținem propoziția $p(1)$: „$1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = 0$", care este falsă.

Pentru $x = 3$, obținem propoziția $p(3)$: „$3^2 - 2 \cdot 3 - 3 = 0$", care este adevărată.

Mulțimea de adevăr a predicatului $p(x)$ este $\{-1, 3\}$, adică mulțimea soluțiilor ecuației $x^2 - 2x - 3 = 0, x \in \mathbb{R}$.

2. Enunțul $p(x, y)$: „$x^2 + y^2 = 5$", unde $x \in \mathbb{Z}$ și $y \in \mathbb{Z}$, este un predicat binar.

Pentru $x = 1, y = 0$, obținem propoziția $p(1, 0)$: „$1^2 + 0^2 = 5$", care este falsă.

Pentru $x = -2, y = 1$, obținem propoziția $p(-2, 1)$: „$(-2)^2 + 1^2 = 5$", care este adevărată.

Mulțimea de adevăr a predicatului $p(x, y)$ este $\{(-2, -1), (-2, 1), (-1, -2), (-1, 2), (1, -2), (1, 2), (2, -1), (2, 1)\}$.

3. Enunțul $p(x, y, z)$: „$x^2 + y^2 = z^2$, unde $x, y, z \in \mathbb{N}^*$, este un predicat ternar.

Pentru $x = 1, y = 2, z = 3$, obținem propoziția $p(1, 2, 3)$: „$1^2 + 2^2 = 3^2$", care este falsă.

Pentru $x = 3, y = 4, z = 5$, obținem propoziția $p(3, 4, 5)$: „$3^2 + 4^2 = 5^2$", care este adevărată.

Mulțimea de adevăr a predicatului $p(x, y, z)$ este formată din toate **tripletele pitagoreice**: {(3, 4, 5), (5, 12, 13), (6, 8, 10) etc.}.



Gottlob Frege
(1848-1925)

ȘTIAI CĂ...?

- Denumirile anterioare ale logicii matematice au fost *logică simbolică* (opusă logicii filosofice) și *metamatematică*. Primul termen încă este folosit, dar al doilea termen este utilizat în prezent pentru a desemna anumite aspecte ale teoriei demonstrației.
- **Gottlob Frege**, matematician, filosof și logician german, este considerat fondatorul logicii moderne datorită volumului *Notația conceptelor: limbajul formal al gândirii pure, elaborat după modelul aritmeticii* (nu a fost tradus în limba română).

Exerciții rezolvate

1. Precizează care dintre enunțurile următoare este propoziție. Stabilește valoarea de adevăr a propozițiilor identificate.

a) „Închide ușa!" c) „1 este număr prim." e) „$x^2 + 1 = 10$", $x \in \mathbb{Z}$

b) „Ce faci?" d) „$2 + 2 = 4$" f) „Cartea este un aliment."

Rezolvare:

a) Enunțul nu este o propoziție, deoarece nu îi putem atribui una dintre valorile „adevărat" sau „fals".

b) Enunțul nu este o propoziție, deoarece nu îi putem atribui una dintre valorile „adevărat" sau „fals".

c) Enunțul este o propoziție falsă.

d) Enunțul este o propoziție adevărată.

e) Enunțul nu este o propoziție, deoarece pentru anumite valori ale variabilei este adevărat, iar pentru altele este fals (enunțul este predicat unar).

f) Enunțul este o propoziție falsă.

2. Stabilește mulțimea de adevăr a predicatului $p(x)$.

a) $p(x)$: „$2(x - 1) + 3 = x$", $x \in \mathbb{R}$; b) $p(x)$: „$3x - 9 < 4x + 2$", $x \in \mathbb{R}$.

Rezolvare:

a) Rezolvăm ecuația $2(x - 1) + 3 = x$, $x \in \mathbb{R}$.

$2(x - 1) + 3 = x \Leftrightarrow 2x - 2 + 3 = x \Leftrightarrow 2x - x + 1 = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Mulțimea de adevăr a predicatului $p(x)$ este $\{-1\}$.

b) Rezolvăm inecuația $3x - 9 < 4x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

$3x - 9 < 4x + 2 \Leftrightarrow 3x - 4x < 2 + 9 \Leftrightarrow -x < 11 \Leftrightarrow x > -11 \Leftrightarrow x \in (-11, +\infty)$

Mulțimea de adevăr a predicatului $p(x)$ este $(-11, +\infty)$.

3. Determină mulțimea de adevăr a predicatului $p(x, y)$: „$|3x - 4| + |-2y - 5| = 0$", unde $x, y \in \mathbb{R}$.

Rezolvare:

$$\left.\begin{array}{l} |3x - 4| \geq 0, \text{ pentru orice număr real } x \\ |-2y - 5| \geq 0, \text{ pentru orice număr real } y \\ |3x - 4| + |-2y - 5| = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow |3x - 4| = 0 \text{ și } |-2y - 5| = 0$$

$|3x - 4| = 0 \Leftrightarrow 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow 3x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$

$|-2y - 5| = 0 \Leftrightarrow -2y - 5 = 0 \Leftrightarrow -2y = 5 \Leftrightarrow y = -\frac{5}{2}$

Mulțimea de adevăr a predicatului $p(x, y)$ este $\left\{\left(\frac{4}{3}, -\frac{5}{2}\right)\right\}$.



Aplic

1. Identifică propozițiile și predicatele dintre enunțurile următoare. Pentru fiecare dintre propozițiile identificate, precizează valoarea de adevăr, iar pentru fiecare dintre predicatele identificate, precizează mulțimea de adevăr.

a) „10 este număr prim."

b) „Cum este vremea?"

c) „$72 : 8 = 7$"

d) „Triunghiul isoscel are două laturi congruente."

e) „$72 : x = 12$", $x \in \mathbb{Z}^*$

f) „$x + \sqrt{y} = 1$", $x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbf{N}$

g) „$x + 2 = 3$", $x \in \mathbb{Z}$

h) „$x^2 - 4x + 4 = 0$", $x \in \mathbb{Z}$

i) „Aria unui triunghi este egală cu semiprodusul dintre lungimea unei laturi și lungimea înălțimii corespunzătoare acesteia."

j) „Șterge praful!"

k) „$2 : 8 = 0{,}4$"

l) „$x - 3 \leq 5$", $x \in \mathbb{R}$

m) „$4x^2 - 4x + 1 = 0$", $x \in \mathbb{R}$

n) „În intervalul de numere reale $(-3, 2]$ sunt 5 numere întregi."

o) „$\sqrt{9} + \sqrt{16} = \sqrt{25}$"

p) „$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3}{5}$"

q) „Calculează $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$!"

2. Fie predicatul $p(x)$: „$x^2 \geq x$", unde $x \in \mathbb{R}$. Stabilește valorile de adevăr ale propozițiilor:

a) $p(0)$; b) $p(-1)$; c) $p\left(\frac{2}{3}\right)$; d) $p(\sqrt{2})$; e) $p\left(\frac{1}{2}\right)$.

3. Fie predicatul $p(x, y)$: „x divide y", unde $x \in \mathbf{N}^*$, $y \in \mathbf{N}$. Stabilește valorile de adevăr ale propozițiilor:

a) $p(2, 1)$; b) $p(3, 9)$; c) $p(1, 10)$; d) $p(5, 5)$.

4. Fie predicatul $p(x, y)$: „$x^2 - 2y^2 = 3$", unde $x, y \in \mathbb{R}$. Stabilește valorile de adevăr ale propozițiilor:

a) $p(1, 1)$; b) $p(0, -2)$; c) $p(3, -\sqrt{3})$.

5. Determină mulțimile de adevăr ale predicatelor următoare:

a) $p(x)$: „$(x + 2) \cdot 3 - 1 = -2x + 5$", $x \in \mathbb{R}$;

b) $p(x)$: „$x^2 - 5x + 6 = 0$", $x \in \mathbb{Z}$;

c) $p(x)$: „$|x - 2| = 5$", $x \in \mathbb{R}$;

d) $p(x)$: „$|x + 3| + |x^2 - 9| = 0$", $x \in \mathbb{R}$;

e) $p(x)$: „$15 \vdots x$", $x \in \mathbf{N}^*$;

f) $p(x)$: „$\frac{8}{x+1} \in \mathbf{N}$", $x \in \mathbf{N}$;

g) $p(x)$: „$(x - 3)^2 - 1 = 0$", $x \in \mathbb{R}$;

h) $p(x)$: „$\frac{2x-1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{1}{6}$", $x \in \mathbb{R}$;

i) $p(x)$: „$|2 - 3x| \leq 4$", $x \in \mathbb{R}$;

j) $p(x)$: „$2x - 1 - (x + 3) \leq 4 - x$", $x \in \mathbb{R}$;

k) $p(x)$: „$5(x + 2) - 3(x - 1) > -2$", $x \in \mathbb{R}$;

l) $p(x, y)$: „$|x - 2| + |y - 1| = 0$", $x \in \mathbb{R}$.

LUCRAȚI ÎN PERECHI!

Harta conceptuală: Propoziții și predicate

Realizați o hartă conceptuală cu titlul „Propoziții și predicate".

- Creați o ramură principală pentru **propoziții** și o alta pentru **predicate**. Dați câte trei exemple din fiecare categorie.
- Creați ramuri secundare pentru predicate: unar, binar și ternar. Dați câte un exemplu pentru fiecare caz.

Folosiți culori diferite pentru fiecare secțiune.





1.2. Operații cu propoziții și predicate: negația, conjuncția, disjuncția, implicația, echivalența

Descopăr

Precizează valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

1. p: „2 nu divide 4."
2. q: „2 divide 4."
3. r: „2 divide 4 sau 2 este număr prim."
4. s: „Dacă 2 divide 7, atunci 2 este număr prim."
5. t: „2 divide 4 și 2 este număr prim."

Învăț

Utilizând elemente de legătură, care în limbajul curent sunt exprimate prin cuvintele „nu", „sau", „și", „implică", „echivalent", din propoziții simple se pot forma propoziții noi.

OBSERVAȚII.

1. În loc de „**implică**" se poate folosi „**dacă ..., atunci**", iar în loc de „**echivalent**" se poate folosi „**dacă și numai dacă**".

2. Elementele de legătură „**nu**", „**sau**", „**și**", „**implică**", „**echivalent**" se numesc **operatori logici** sau **conectori logici**.

3. Propoziția obținută în urma folosirii conectorilor logici se numește **propoziție compusă**.

EXEMPLU:

Se consideră propozițiile p: „2 + 3 = 5" și q: „Numărul natural 2 este număr prim.".

Cu ajutorul operatorilor logici se pot forma propoziții compuse, precum:

- „2 + 3 = 5 **și** numărul natural 2 este număr prim."
- „2 + 3 = 5 **sau** numărul natural 2 este număr prim."
- „2 + 3 = 5 **implică** numărul natural 2 este număr prim." sau

„**Dacă** 2 + 3 = 5, **atunci** numărul natural 2 este număr prim."

- „2 + 3 = 5 **echivalent** cu numărul natural 2 este număr prim." sau

„2 + 3 = 5 **dacă și numai dacă** numărul natural 2 este număr prim."

Valoarea de adevăr a unei propoziții compuse este determinată de valorile de adevăr ale propozițiilor componente.

Operațiile logice elementare cu propoziții sunt negația, disjuncția, conjuncția, implicația și echivalența.

1. Negația

A. Negația propozițiilor

Negația propoziției p este propoziția „*non p*", care se notează $\neg p$ sau $\overline{p}$ și care este adevărată când p este falsă și falsă când p este adevărată.

Valoarea de adevăr a propoziției „*non p*" este ilustrată în tabelul de adevăr alăturat:

p	$\neg p$
1	0
0	1

EXEMPLE:

1. p: „Câinele este un mamifer." (A)

$\neg p$: „Câinele nu este un mamifer." (F)

2. p: „Numărul 7 este par." (F)

$\neg p$: „Numărul 7 nu este par." (A)

B. Negația predicatelor

Se consideră predicatul $p(x)$, unde $x \in E$, $E \neq \emptyset$.

Negația predicatului $p(x)$ se notează $\neg p(x)$ sau $\overline{p(x)}$. Mulțimea de adevăr a predicatului $\neg p(x)$ este mulțimea tuturor valorilor variabilei x pentru care predicatul $p(x)$ devine o propoziție falsă.

EXEMPLU:

$p(x)$: „$x \geq 2$", $x \in \mathbb{R}$, $\neg p(x)$: „$x < 2$", $x \in \mathbb{R}$

Mulțimea de adevăr a predicatului $p(x)$ este $[2, +\infty)$, iar mulțimea de adevăr a predicatului $\neg p(x)$ este $(-\infty, 2)$.

2. Conjuncția

A. Conjuncția propozițiilor

Conjuncția propozițiilor p și q este propoziția „p și q", notată $p \wedge q$, care este adevărată când ambele propoziții sunt adevărate și falsă în celelalte cazuri.

Valoarea de adevăr a propoziției „p și q" este ilustrată în tabelul de adevăr alăturat:

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

EXEMPLE:

1. Fie propozițiile p: „$15 > 10$" și q: „$8 \vdots 2$". Propoziția $p \wedge q$: „$15 > 10$ și $8 \vdots 2$" este adevărată, deoarece atât p, cât și q sunt propoziții adevărate.

2. Fie propozițiile p: „$2 + 3 = 6$" și q: „Pătratul este un paralelogram". Propoziția $p \wedge q$: „$2 + 3 = 6$ și pătratul este un paralelogram" este falsă, deoarece propoziția p este falsă.

OBSERVAȚIE.

Propoziția **$p \wedge (\neg p)$**, care este întotdeauna falsă, exprimă **principiul contradicției**, potrivit căruia **o propoziție nu poate fi simultan și adevărată, și falsă**.

B. Conjuncția predicatelor

Se consideră predicatele $p(x)$ și $q(x)$, unde $x \in E$ și $E \neq \emptyset$.

Conjuncția predicatelor $p(x)$ și $q(x)$ este predicatul „$p(x)$ și $q(x)$", notat $p(x) \wedge q(x)$.

Mulțimea de adevăr a predicatului $p(x) \wedge q(x)$ este mulțimea tuturor valorilor variabilei x pentru care ambele predicate $p(x)$ și $q(x)$ devin propoziții adevărate.

EXEMPLU:

Se consideră predicatele $p(x)$: „x este număr prim", $x \in \mathbb{N}$, și $q(x)$: „$x < 17$", $x \in \mathbb{N}$. Conjuncția predicatelor $p(x)$ și $q(x)$ este predicatul $p(x) \wedge q(x)$: „x este număr prim și $x < 17$.", $x \in \mathbb{N}$. Mulțimea de adevăr a predicatului $p(x)$ este {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...}, iar mulțimea de adevăr a predicatului $q(x)$ este {0, 1, 2, 3, ..., 16}.

Mulțimea de adevăr a predicatului $p(x) \wedge q(x)$ este mulțimea tuturor valorilor variabilei x pentru care ambele predicate ($p(x)$, $q(x)$) devin propoziții adevărate, adică mulțimea {2, 3, 5, 7, 11, 13}.

Observăm că, dacă notăm cu A mulțimea de adevăr a predicatului $p(x)$ și cu B mulțimea de adevăr a predicatului $q(x)$, atunci mulțimea de adevăr a predicatului $p(x) \wedge q(x)$ este $A \cap B$.

Într-adevăr, un element x_0 aparține mulțimii de adevăr a predicatului $p(x) \wedge q(x)$ atunci când propozițiile $p(x_0)$ și $q(x_0)$ sunt simultan adevărate, adică atunci când $x_0 \in A$ și $x_0 \in B$, deci $x_0 \in A \cap B$.

3. Disjuncția

A. Disjuncția propozițiilor

Disjuncția propozițiilor *p* și *q* este propoziția „*p* sau *q*", notată $p \vee q$, care este adevărată dacă cel puțin una dintre propoziții este adevărată și falsă când ambele propoziții sunt false.

Valoarea de adevăr a propoziției „*p* sau *q*" este ilustrată în tabelul de adevăr alăturat:

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

EXEMPLU:

Se consideră propozițiile *p*: „3 este număr natural." și *q*: „3 este număr par.". Propoziția $p \vee q$: „3 este număr natural sau este par." este adevărată, deoarece propoziția *p* este adevărată.

OBSERVAȚIE.

Propoziția $p \vee (\neg p)$ este adevărată pentru orice propoziție *p* și exprimă **principiul terțului exclus**, potrivit căruia **o propoziție este sau adevărată, sau falsă**.

B. Disjuncția predicatelor

Se consideră predicatele $p(x)$ și $q(x)$, unde $x \in E$ și $E \neq \emptyset$.

Disjuncția predicatelor $p(x)$ și $q(x)$ este predicatul „$p(x)$ sau $q(x)$", notat $p(x) \vee q(x)$. Mulțimea de adevăr a predicatului $p(x) \vee q(x)$ este mulțimea tuturor valorilor variabilei x pentru care cel puțin unul dintre predicatele $p(x)$ și $q(x)$ devine propoziție adevărată.

EXEMPLU:

Se consideră $p(x)$: „$x + 3 > 6$", $x \in \mathbf{N}$, și $q(x)$: „$x < 7$", $x \in \mathbf{N}$. Disjuncția predicatelor $p(x)$ și $q(x)$ este predicatul $p(x) \vee q(x)$: „$x + 3 > 6$ sau $x < 7$", $x \in \mathbf{N}$. Mulțimea de adevăr a predicatului $p(x)$ este {4, 5, 6, 7, 8, ...}, iar mulțimea de adevăr a predicatului $q(x)$ este {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Mulțimea de adevăr a predicatului $p(x) \vee q(x)$ este mulțimea tuturor valorilor variabilei x pentru care cel puțin unul dintre predicatele $p(x)$ și $q(x)$ devine propoziție adevărată, adică mulțimea {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...}, care reprezintă mulțimea numerelor naturale.

Observăm că, dacă notăm cu A mulțimea de adevăr a predicatului $p(x)$ și cu B mulțimea de adevăr a predicatului $q(x)$, atunci mulțimea de adevăr a predicatului $p(x) \vee q(x)$ este $A \cup B$.

Într-adevăr, un element x_0 aparține mulțimii de adevăr a predicatului $p(x) \vee q(x)$ atunci când cel puțin una dintre propozițiile $p(x_0)$ și $q(x_0)$ este adevărată, adică atunci când $x_0 \in A$ sau $x_0 \in B$, deci $x_0 \in A \cup B$.

4. Implicația

A. Implicația propozițiilor

Implicația propozițiilor *p* și *q*, în această ordine, este propoziția „*p* implică *q*" sau „dacă *p*, atunci *q*" (notată $p \rightarrow q$), care este falsă dacă *p* este adevărată și *q* este falsă și este adevărată în toate celelalte cazuri.

Propoziția ***p*** se numește **premisă** sau **ipoteză**, iar propoziția ***q*** se numește **concluzie**.

Valoarea de adevăr a propoziției „*p* implică *q*" este ilustrată în tabelul de adevăr alăturat:

p	*q*	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

OBSERVAȚIE.

Propoziția „*p* implică *q*" se poate citi și „dacă *p*, atunci *q*" sau „din *p* rezultă *q*".

EXEMPLE:

1. Se consideră propozițiile *p*: „8 este multiplu al lui 4." și *q*: „6 este număr par.". Propoziția $p \to q$: „8 este multiplu al lui 4 implică 6 este număr par." este adevărată, deoarece ambele propoziții *p* și *q* sunt adevărate.

2. Se consideră propozițiile *p*: „$2 + 3 = 5$" și *q*: „$2^2 + 3^2 = 5^2$". Propoziția $p \to q$: „$2 + 3 = 5$ implică $2^2 + 3^2 = 5^2$." este falsă, deoarece propoziția *p* este adevărată și propoziția *q* este falsă.

B. Implicația predicatelor

Se consideră predicatele $p(x)$ și $q(x)$, unde $x \in E$ și $E \neq \emptyset$.

Implicația predicatelor $p(x)$ și $q(x)$ (în această ordine) este predicatul „$p(x)$ implică $q(x)$" sau „dacă $p(x)$, atunci $q(x)$", notat $p(x) \to q(x)$.

Mulțimea de adevăr a predicatului $p(x) \to q(x)$ este mulțimea tuturor valorilor variabilei x pentru care predicatul $p(x) \to q(x)$ devine o propoziție adevărată.

EXEMPLE:

1. Fie predicatele $p(x)$: „$x > 3$", $x \in \mathbf{N}$, și $q(x)$: „$x > 5$", $x \in \mathbf{N}$. Implicația predicatelor $p(x)$ și $q(x)$ este predicatul $p(x) \to q(x)$: „$x > 3$ implică $x > 5$.", $x \in \mathbf{N}$. Mulțimea de adevăr a predicatului $p(x)$ este {4, 5, 6, ...}, iar mulțimea de adevăr a predicatului $q(x)$ este {6, 7, 8, ...}.

Mulțimea de adevăr a predicatului $p(x) \to q(x)$ este mulțimea tuturor valorilor variabilei x pentru care fie predicatul $p(x)$ devine propoziție falsă (mulțimea {0, 1, 2, 3}), fie ambele predicate $p(x)$ și $q(x)$ devin propoziții adevărate (mulțimea {6, 7, 8, ...}, adică $\mathbf{N} \setminus \{4, 5\}$).

2. Fie predicatele $p(x)$: „$x \vdots 6$", $x \in \mathbf{N}$, și $q(x)$: „$x \vdots 3$", $x \in \mathbf{N}$. Implicația predicatelor $p(x)$ și $q(x)$ este predicatul $p(x) \to q(x)$: „$x \vdots 6$ implică $x \vdots 3$.", $x \in \mathbf{N}$. Mulțimea de adevăr a predicatului $p(x)$ este {0, 6, 12, 18, ...}, iar mulțimea de adevăr a predicatului $q(x)$ este {0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, ...}.

Mulțimea de adevăr a predicatului $p(x) \to q(x)$ este mulțimea tuturor valorilor variabilei x pentru care fie predicatul $p(x)$ devine propoziție falsă (mulțimea $\mathbf{N} \setminus \{0, 6, 12, 18, ...\}$), fie ambele predicate $p(x)$ și $q(x)$ devin propoziții adevărate (mulțimea {0, 6, 12, 18, ...}, adică $\mathbf{N}$).

Dacă notăm cu A mulțimea de adevăr a predicatului $p(x)$ și cu B mulțimea de adevăr a predicatului $q(x)$, atunci A = {0, 6, 12, 18, ...} și B = {0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, ...}. Observăm că orice element din mulțimea A aparține și mulțimii B (orice multiplu de 6 este și multiplu de 3), deci $A \subset B$.

5. Echivalența

A. Echivalența propozițiilor

Echivalența propozițiilor *p* și *q* este propoziția „*p* echivalent cu *q*" sau „*p* dacă și numai dacă *q*" (notată $p \leftrightarrow q$), care este adevărată când ambele propoziții au aceeași valoare de adevăr și este falsă în celelalte cazuri.

Valoarea de adevăr a propoziției „p echivalent cu q" este ilustrată în tabelul de adevăr alăturat:

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

EXEMPLU:

1. Se consideră propozițiile p: „8 : 4 = 2" și q: „6 + 3 = 9".
Propoziția $p \leftrightarrow q$: „8 : 4 = 2 echivalent cu 6 + 3 = 9" este adevărată, deoarece ambele propoziții p și q sunt adevărate.

2. Se consideră propozițiile p: „3 + 3 = 9" și q: „5 < 6". Propoziția $p \leftrightarrow q$: „3 + 3 = 9 dacă și numai dacă 5 < 6" este falsă, deoarece propozițiile nu au aceeași valoare de adevăr (propoziția p este falsă și propoziția q este adevărată).

B. Echivalența predicatelor

Se consideră predicatele $p(x)$ și $q(x)$, unde $x \in E$ și $E \neq \emptyset$.

Echivalența predicatelor $p(x)$ și $q(x)$ este predicatul „$p(x)$ este echivalent cu $q(x)$" *sau* „$p(x)$ dacă și numai dacă $q(x)$", notat $p(x) \leftrightarrow q(x)$.

Mulțimea de adevăr a predicatului $p(x) \leftrightarrow q(x)$ este mulțimea tuturor valorilor variabilei x pentru care predicatele $p(x)$ și $q(x)$ devin propoziții cu aceeași valoare de adevăr (sunt ambele adevărate sau ambele false).

EXEMPLU:

Se consideră predicatele $p(x)$: „x este număr par.", $x \in \mathbb{N}$, și $q(x)$: „$x \vdots 2$", $x \in \mathbb{N}$. Echivalența predicatelor $p(x)$ și $q(x)$ este predicatul $p(x) \leftrightarrow q(x)$: „$x$ este număr par dacă și numai dacă $x \vdots 2$", $x \in \mathbb{N}$. Mulțimea de adevăr a predicatului $p(x)$ este {0, 2, 4, 6, ...}, iar mulțimea de adevăr a predicatului $q(x)$ este {0, 2, 4, 6, ...}.

Dacă notăm cu A mulțimea de adevăr a predicatului $p(x)$ și cu B mulțimea de adevăr a predicatului $q(x)$, atunci A = B.

În general, două predicate sunt echivalente dacă au aceeași mulțime de adevăr.

În calculul propozițional, cu litere (prin care se notează propoziții) și cu simbolurile operatorilor logici ($\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$) se formează expresii numite **formule ale calculului propozițional**.

Două formule ale calculului propozițional α și β se numesc **echivalente** dacă, pentru orice valori de adevăr ale propozițiilor care le compun, au **aceeași valoare de adevăr**. Notăm acest lucru prin $\alpha \equiv \beta$.

EXEMPLU:

$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
1	1	1	1	**1**	1	1	**1**
1	1	0	1	**1**	1	0	**1**
1	0	1	1	**1**	0	1	**1**
1	0	0	0	**0**	0	0	**0**
0	1	1	1	**0**	0	0	**0**
0	1	0	1	**0**	0	0	**0**
0	0	1	1	**0**	0	0	**0**
0	0	0	0	**0**	0	0	**0**

O formulă a calculului propozițional care este adevărată, indiferent de valorile de adevăr ale propozițiilor care o compun, se numește **tautologie**.

EXEMPLU:

$[(p \to q) \wedge p] \to q$ este tautologie.

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge p$	$[(p \to q) \wedge p)] \to q$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

O formulă a calculului propozițional care este falsă, indiferent de valorile de adevăr ale propozițiilor care o compun, se numește **contradicție**.

Aplic

1. Scrie negațiile următoarelor propoziții:

a) „Temperatura aerului este pozitivă."

b) „Îmi place matematica."

c) „122 = 144"

d) „π = 3,14"

e) „2 + 9 = 10"

f) „Trenul are întârziere."

g) „2 < 5"

h) „Un triunghi are 4 vârfuri."

2. Verifică dacă următoarele propoziții compuse sunt adevărate:

a) „Numărul natural 10 este par și este mai mare decât 8."

b) „10 < 11 sau $10^2 = 20$"

c) „Dacă 5 > 8, atunci 7 este număr par."

d) „Dacă triunghiul are trei laturi, atunci pătratul are cinci vârfuri."

e) „$\sqrt{2} \in \mathbb{N}$ dacă și numai dacă $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}$."

f) „Numărul 121 este par sau este pătrat perfect."

3. Se consideră următoarele propoziții: p: „5 este număr prim", q: „2 este pătratul unui număr natural" și r: „2 + 2 = 5". Stabilește valorile de adevăr ale propozițiilor: $p \vee q$, $p \vee r$, $q \to p$, $r \leftrightarrow q$, $\neg p$, $p \wedge r$, $r \to p$, $p \leftrightarrow q$, $\neg q$.

4. Se consideră propozițiile: p_1: „3,2 < 3,15"; p_2: „$\sqrt{6}(\sqrt{3} - \sqrt{2}) - 3\sqrt{2} + \sqrt{12} = 0$"; p_3: „$\left(3 - 5 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4}\right) \cdot 2 = 5$"; p_4: „$\frac{3}{\sqrt{2}} + \sqrt{18} = 6$"; p_5: „5,36 + 2,4 = 7,40".

Stabilește valoarea de adevăr a fiecărei propoziții:

a) $\neg p_1$;

b) $\neg p_5$;

c) $p_1 \vee p_4$;

d) $p_1 \to p_4$;

e) $p_2 \to p_5$;

f) $p_3 \leftrightarrow p_2$;

g) $p_4 \leftrightarrow p_1$;

h) $p_2 \wedge p_3$;

i) $p_3 \wedge p_4$;

j) $p_3 \vee p_5$;

k) $p_4 \vee p_2$;

l) $(\neg p_2) \vee (\neg p_3)$.

5. Se consideră predicatele $p(x)$: „$2x - 6 < 3x + 1$", $x \in \mathbb{R}$, și $q(x)$: „$|x + 2| \leq 11$", $x \in \mathbb{R}$. Determină mulțimea de adevăr a predicatului $p(x) \wedge q(x)$.

ȘTIAI CĂ...?

- **Tautologia** este o propoziție compusă care este adevărată, pentru orice valori de adevăr ale propozițiilor componente.
- **Contradicția logică** este o propoziție compusă care este falsă, pentru orice valori de adevăr ale propozițiilor componente.

EXERSEAZĂ!

Se dau propozițiile:

p: „Vremea este frumoasă." și

q: „Mergem în parc."

a) Scrie următoarele propoziții: $p \wedge q$, $p \to q$, $(\neg p) \wedge q$, $\neg(p \vee q)$, $q \leftrightarrow p$, $(\neg q) \to (\neg p)$.

b) Scrie următoarele enunțuri folosind literele p, q și operatorii logici.

- Vremea este frumoasă, dar nu mergem în parc.
- Dacă nu mergem în parc, înseamnă că vremea nu este frumoasă.
- Nu este adevărat că mergem în parc sau că vremea este frumoasă.
- Mergem în parc dacă și numai dacă vremea este frumoasă.

EXERSEAZĂ!

Fie propozițiile:
p: „Andrei învață la matematică."
q: „Andrei este obosit."
r: „Andrei primește o notă mare."

i) Scrie următoarele propoziții:
$q \to r$;
$p \wedge q$;
$\neg p$;
$\neg(p \vee q)$;
$(\neg p) \vee (\neg q)$;
$(r \wedge q) \to p$;
$(p \wedge q) \vee p$.

ii) Scrie formulele de calcul propozițional corespunzătoare enunțurilor:

a) Andrei nu învață la matematică, dar primește o notă mare.

b) Dacă Andrei este obosit și nu învață la matematică, atunci nu primește o notă mare.

c) Nu este adevărat că Andrei este obosit sau nu învață la matematică.

d) Dacă Andrei învață la matematică, atunci primește o notă mare.

e) Andrei învață la matematică dacă și numai dacă nu este obosit.

6. Se consideră predicatele $p(x)$: „$2(x-3)-4(x+1)>-18$", $x \in \mathbb{R}$, și $q(x)$: „$3x-9 \geq 0$", $x \in \mathbb{R}$. Determină mulțimile de adevăr ale predicatelor:

a) $\neg p(x)$; c) $p(x) \wedge q(x)$; e) $p(x) \leftrightarrow q(x)$.

b) $p(x) \vee q(x)$; d) $p(x) \to q(x)$;

7. Se consideră predicatele $p(x, y)$: „$2x + y = 6$", $x, y \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ și $q(x, y)$: „$3x + y = 8$", $x, y \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Determină mulțimile de adevăr ale predicatelor:

a) $p(x, y) \vee q(x, y)$; c) $q(x, y) \to p(x, y)$;

b) $p(x, y) \to q(x, y)$; d) $p(x, y) \leftrightarrow q(x, y)$.

8. Folosind propozițiile p: „12 este număr impar", q: „$3 + 4 = 7$" și r: „7 divide 12", scrie în caiet câte două propoziții cu fiecare dintre operatorii logici „nu", „sau", „și", „implică", „echivalent". Precizează valorile de adevăr ale acestora.

9. Se consideră predicatele $p(x)$: „$x - 1 \leq 10$", $x \in \mathbb{R}$, și $q(x)$: „$2x - 3 > 5$", $x \in \mathbb{R}$. Determină mulțimea de adevăr a fiecărui predicat: $\neg p(x)$, $p(x) \vee q(x)$, $p(x) \wedge q(x)$.

10. Se consideră predicatele $p(x)$: „$x - 1 = 0$", $x \in \mathbb{R}$, și $q(x)$: „$x^2 - 1 = 0$", $x \in \mathbb{R}$.

a) Determină mulțimea de adevăr a predicatului $p(x) \to q(x)$.

b) Sunt predicatele $p(x)$ și $q(x)$ echivalente?

11. Identifică predicatele implicate în următoarele enunțuri, apoi scrie enunțurile folosind simboluri logice.

a) „Un număr natural este par dacă și numai dacă este divizibil cu 2."

b) „Dacă un număr natural este multiplu de 4, atunci este număr par."

c) „Un număr natural este divizibil cu 3 dacă și numai dacă suma cifrelor sale este divizibilă cu 3."

d) „Dacă un patrulater este romb, atunci laturile lui sunt congruente."

12. Se consideră propoziția compusă „Dacă în triunghiul ABC, $\sphericalangle A = 30°$ și $\sphericalangle B = 70°$, atunci $\sphericalangle C = 80°$.".

a) Identifică propozițiile simple care alcătuiesc propoziția dată și notează-le cu literele p, q și r.

b) Scrie propoziția compusă dată folosind literele p, q, r și operatori logici.

13. Fie p și q două propoziții simple. Realizează tabelul de adevăr pentru fiecare dintre următoarele propoziții compuse:

a) $(p \vee q) \to p$; d) $(\neg p \vee q) \to \neg p$; g) $(p \wedge \neg q) \to (\neg p \vee q)$;

b) $q \to (p \wedge q)$; e) $\neg q \wedge (p \vee q)$; h) $(\neg p \vee q) \to \neg p$.

c) $(p \leftrightarrow q) \to q$; f) $(p \wedge q) \to (p \vee q)$;

14. Demonstrează următoarele echivalențe cu ajutorul tabelelor de adevăr:

a) $p \equiv \neg(\neg p)$; c) $p \to q \equiv (\neg q) \to (\neg p)$;

b) $p \to q \equiv (\neg p) \vee q$; d) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

15. Arată că următoarele formule ale calculului propozițional sunt tautologii:

a) $p \to (p \vee q)$; c) $(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$; e) $[(p \vee q) \vee r] \leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$;

b) $(p \wedge q) \to p$; d) $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$; f) $[(p \wedge q) \wedge r] \leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$.